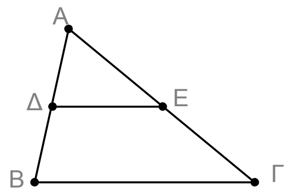
5.6 – 5.9

ΘΕΩΡΙΑ

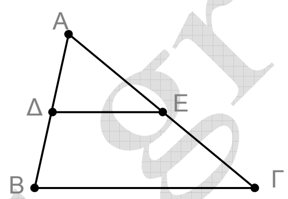
1.
Θεώρημα

Δ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ $\Rightarrow$ ΔΕ $= // \ \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$



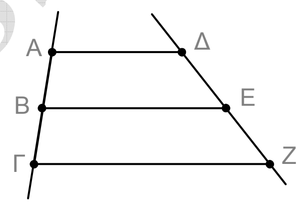
2.
Θεώρημα

Δ μέσο της ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ $\Rightarrow$ Ε μέσο της ΑΓ



3.
Θεώρημα

ΑΒ = ΒΓ και ΑΔ//ΒΕ//ΓΖ $\Rightarrow$ ΔΕ = ΕΖ

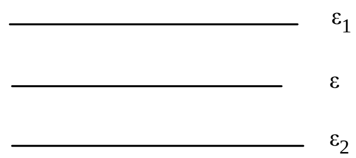


4.
Ο γ. τόπος της μεσοπαράλληλης

Έστω ε η μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2.
Τότε ισχύουν :

i) Κάθε σημείο της ε ισαπέχει από τις ε_1, ε_2.

ii) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις ε_1, ε_2 ανήκει στην ε.



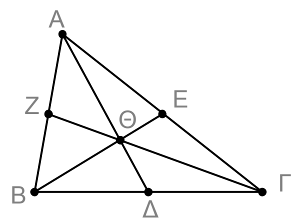
5.
Το βαρύκεντρο τριγώνου

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Θ, που λέγεται κέντρο βάρους του τριγώνου.

Ιδιότητα : ΑΘ = 2ΘΔ

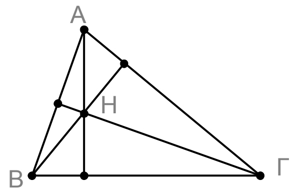
$$\text{ΑΘ} = \frac{2}{3}\text{ΑΔ}$$

$$\text{ΘΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΔ}$$



6.
Το ορθόκεντρο τριγώνου

Οι φορείς των υψών κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Η, που λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου.



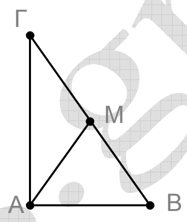
Ιδιότητα : Οι κορυφές τριγώνου και το ορθόκεντρό του αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή καθένα τους είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζεται από τα άλλα.

Π.χ Το Α είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΗΒΓ.

7.
Θεώρημα

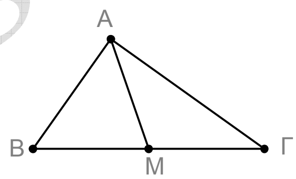
Τρ.ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και ΑΜ διάμεσος $\Rightarrow$

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}$$



8.
Θεώρημα

Αν ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ και $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.



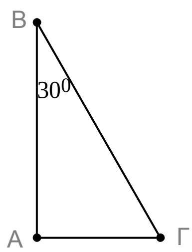
9.
Προσοχή

Στο ορθογώνιο τρίγωνο, όταν φέρνουμε τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, έχουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα

10.
Θεώρημα

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία :

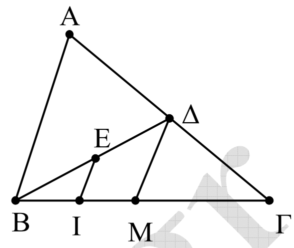
$\hat{B} = 30^o \Leftrightarrow A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ι της ΒΓ έτσι ώστε $ΒΙ = \frac{1}{4}ΒΓ$. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου ΒΔ, δείξτε ότι $ΙΕ = // \frac{1}{4}ΑΒ$



Λύση

Έστω Μ το μέσο της ΒΓ.
Φέρουμε τη ΔΜ.

$ΒΙ = \frac{1}{4}ΒΓ$ και $ΒΜ = \frac{1}{2}ΒΓ \Rightarrow ΒΙ = \frac{1}{2}ΒΜ$

Στο τρίγωνο ΒΔΜ, το Ε είναι μέσο του ΒΔ

και το Ι μέσο του ΒΜ, άρα $ΕΙ = // \frac{1}{2}ΔΜ$ **(1)**

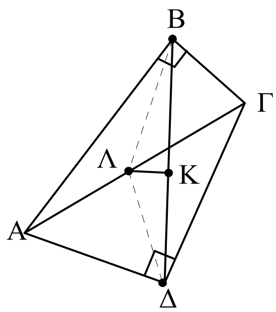
Επίσης Δ μέσου του ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ $\Rightarrow ΔΜ = // \frac{1}{2}ΑΒ$ **(2)**

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow ΕΙ = // \frac{1}{4}ΑΒ$

2.

Οι γωνίες Β και Δ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ορθές. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, δείξτε ότι $ΚΛ \perp ΒΔ$.

Λύση



Φέρουμε τα τμήματα ΛΒ και ΛΔ.
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ, οι ΛΒ και ΛΔ είναι διάμεσοι στην υποτείνουσα,

άρα $ΒΛ = \frac{ΑΓ}{2} = ΔΛ$

Το τρίγωνο λοιπόν ΛΒΔ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσός του ΛΚ είναι και ύψος του.
Οπότε $ΛΚ \perp ΒΔ$

3.

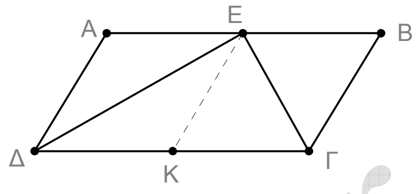
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΒ, δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Έστω Κ το μέσο της ΔΓ $\Rightarrow$ ΕΒ = // ΚΓ

ΕΒΓΚ παρ/μμο

ΕΚ = ΒΓ



Όμως από την υπόθεση είναι $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΔΓ}{2}$,

άρα θα είναι και $ΕΚ = \frac{ΔΓ}{2}$.

Στο τρίγωνο λοιπόν ΔΕΓ η διάμεσος του ΕΚ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα $Δ\hat{Ε}Γ = 90^o$

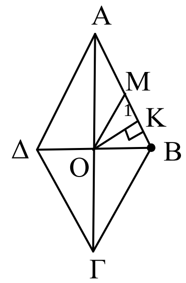
4.

Αν η απόσταση του κέντρου ενός ρόμβου από μία πλευρά του είναι ίση με το $\frac{1}{4}$ της πλευράς , να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου.

Λύση

Έστω ΟΚ η απόσταση του κέντρου Ο από την ΑΒ και Μ το μέσο της ΑΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ, η ΟΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα $ΟΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Και επειδή $ΟΚ = \frac{ΑΒ}{4}$, θα είναι $ΟΚ = \frac{ΟΜ}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΚ η κάθετη πλευρά του ΟΚ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα $\widehat{Μ_1} = 30^o$

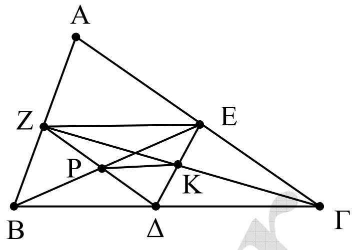
Άρα, στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΜΒ, κάθε μία από τις άλλες γωνίες του θα είναι 75^o, δηλαδή $Α\hat{Β}Ο = 75^o$

Επομένως $Α\hat{Β}Γ = 150^o = Α\hat{Δ}Γ$ και άρα $\hat{Α} = 30^o = \hat{Γ}$

5.

Έστω Δ , Ε , Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ . Αν οι ΒΕ και ΔΖ τέμνονται στο Ρ και οι ΓΖ , ΔΕ τέμνονται στο Κ , δείξτε ότι $PK = // \frac{B\Gamma}{4}$

Λύση



Αφού Ζ μέσο του ΑΒ και Ε μέσο του ΑΓ,

θα είναι $ZE = // \frac{B\Gamma}{2}$ **(1)**

Άρα ΖΕ = // ΒΔ και ΖΕ = // ΔΓ,
οπότε τα τετράπλευρα ΖΕΔΒ και ΖΕΓΔ
είναι παραλληλόγραμμα.
Συνεπώς Ρ μέσο του ΔΖ και Κ μέσο του ΔΕ,

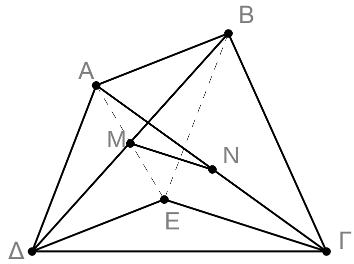
οπότε, από το τρίγωνο ΔΕΖ θα έχουμε $PK =// \frac{ZE}{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $PK = // \frac{B\Gamma}{4}$

6.

Από την κορυφή Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΔ στο οποίο βρίσκεται η ΑΒ την ΔΕ = //ΑΒ .
Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΔ και ΑΓ , δείξτε ότι ΕΓ=//2ΜΝ .

Λύση



Φέρουμε τις ΑΕ, ΒΕ

Αφού ΔΕ = // ΑΒ, το ΑΒΕΔ είναι παρ/μμο.

Επομένως το μέσο Μ της ΒΔ είναι το κέντρο του,

δηλαδή είναι μέσο και του ΑΕ.

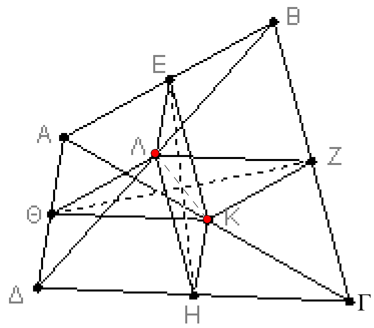
Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το Μ είναι μέσο του ΑΕ και

το Ν μέσο του ΑΓ, άρα $MN= // \frac{E\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Gamma = // 2MN$

7.

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα Ε , Ζ , Η , Θ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ , ΒΓ, ΔΓ, ΔΑ αντίστοιχα και τα Κ , Λ μέσα των ΑΓ, ΒΔ. Να δείξτε ότι το τετράπλευρο Ε Κ Η Λ και το Ζ Κ Θ Λ είναι παραλληλόγραμμα και ότι οι ευθείες ΕΗ , ΖΘ, ΛΚ συντρέχουν.

Λύση



Στο τρίγωνο ΓΔΑ, τα Η και Κ είναι μέσα των ΓΔ και ΓΑ άρα ΚΗ=// $\frac{ΑΔ}{2}$ **(1)**

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΕΛ = // $\frac{ΑΔ}{2}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΚΗ = // ΕΛ

οπότε το ΕΚΗΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το ΚΖΛΘ

είναι παραλληλόγραμμο

Τα παραπάνω παραλληλόγραμμα έχουν κοινή διαγώνιο το τμήμα ΚΛ και οι άλλες διαγώνιές τους είναι τα τμήματα ΕΗ και ΖΘ, επομένως τα τμήματα ΕΗ και ΖΘ, διέρχονται από το μέσο του ΚΛ, δηλαδή τα ΕΗ , ΖΘ, ΛΚ συντρέχουν.

8.

Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία τέμνει την διχοτόμο αυτή στο Δ και την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, δείξτε ότι

i) $ΓΕ = ΑΒ + ΑΓ$, **ii)** $ΔΜ = \dfrac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$, **iii)** $Β\hat{Δ}Μ = \dfrac{\hat{Α}}{2}$

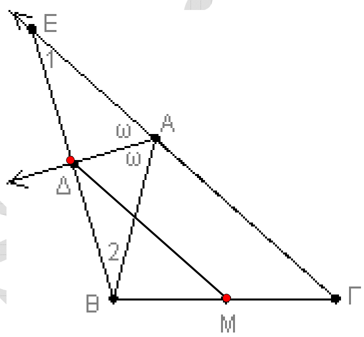
Λύση

i)

Στο τρίγωνο ΑΒΕ, το ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Οπότε $ΑΒ = ΑΕ$ και το Δ θα είναι μέσο του ΒΕ.

Επομένως $ΓΕ = ΑΓ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΒ$



ii)

Αφού Μ μέσο του ΒΓ και Δ μέσο του ΒΕ,

έχουμε $ΔΜ = // \dfrac{ΕΓ}{2}$ και λόγω του (i), $ΔΜ = \dfrac{ΑΓ + ΑΒ}{2}$

iii)

Επειδή $ΔΜ \,//\, ΕΓ$, είναι $Β\hat{Δ}Μ = \hat{Ε}_1$ **(1)**

Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΕ.

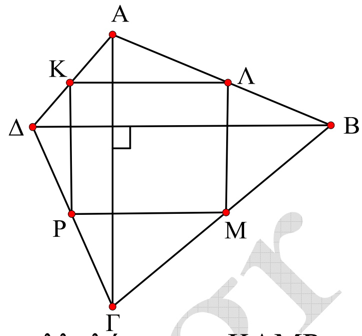
Άρα $\hat{Α} = \hat{Ε}_1 + \hat{Β}_2$ και επειδή $\hat{Β}_2 = \hat{Ε}_1$ λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΒ,

έχουμε $\hat{Α} = 2\hat{Ε}_1$ και λόγω της (1), $\hat{Α} = 2Β\hat{Δ}Μ \;\Leftrightarrow\; Β\hat{Δ}Μ = \dfrac{\hat{Α}}{2}$

9.

Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι κάθετες τότε τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές ορθογωνίου, ενώ αν οι διαγώνιες είναι ίσες τότε τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές ρόμβου. Τι συμβαίνει όταν οι διαγώνιες είναι κάθετες και ίσες ;

Λύση



Ως γνωστόν το ΚΛΜΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Κ, Ρ μέσα των ΑΔ, ΔΓ $\Rightarrow$ $ΚΡ = // \frac{ΑΓ}{2}$ **(1)**

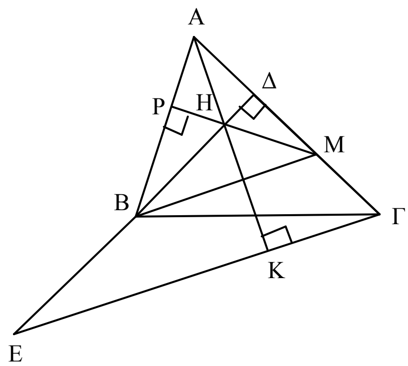
Κ, Λ μέσα των ΑΔ, ΑΒ $\Rightarrow$ $ΚΛ = // \frac{ΒΔ}{2}$ **(2)**

- Έστω ότι $ΑΓ \perp ΒΔ$
  Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $ΚΡ \perp ΚΛ$, επομένως το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΡ είναι ορθογώνιο
- Έστω $ΑΓ = ΒΔ$
  Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $ΚΡ = ΚΛ$, επομένως το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΡ είναι ρόμβος.
- Όταν $ΑΓ \perp ΒΔ$ και $ΑΓ= ΒΔ$ τότε το ΚΛΜΡ είναι ορθογώνιο και ρόμβος δηλαδή τετράγωνο.

10.

Προεκτείνουμε το ύψος ΔΒ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ . Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ , να δείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ και η κάθετη από το Α στην ΕΓ τέμνονται σε σημείο της ΒΔ .

Λύση



Έστω $ΑΚ \perp ΕΓ$ και $ΜΡ \perp ΑΒ$.

Επειδή Β μέσο του ΕΔ και Μ μέσο του ΔΓ,

θα είναι $ΒΜ // ΕΓ$ και αφού $ΑΚ \perp ΕΓ$,

θα είναι και $ΑΚ \perp ΒΜ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΜ το ΒΔ είναι ένα ύψος

και οι ΑΚ , ΜΡ είναι οι φορείς των δύο

άλλων υψών, επομένως οι ΑΚ , ΜΡ και ΒΔ

θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η της ΒΔ